Klausur Nr. 2 - Vektorrechnung

Die Rechnungen müssen stets ersichtlich sein.

Aufgabe 1

Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, sowie die Punkte A(7|0|4) und B(13|3|-2). Die Punkte A und B liegen auf einer Geraden h. Die Ebene E enthält den Punkt A und die Gerade g.

a) Bestimme eine Gleichung der Geraden h und eine Koordinatengleichung der Ebene E. 5 VP

b) Begründe, dass die Geraden g und h parallel sind. 1 VP

Aufgabe 2

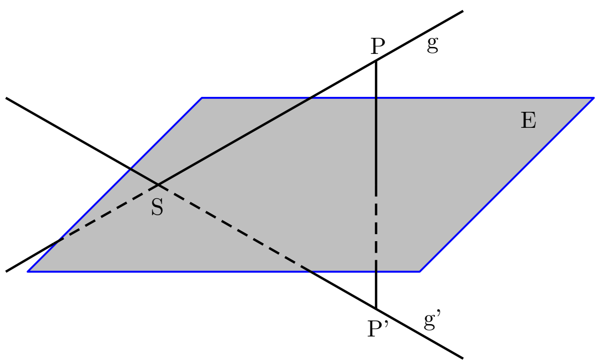
Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in$ R,

und die Ebene E: $-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2$.

a) Gib die Ebene E sowohl in Parameter- als auch in Normalenform an. 4 VP

b) Bestimme den Schnittpunkt S der Geraden g und der Ebene E. 2 VP

c) Es gilt P(5|1|5|) $\in$ g. P wird an E gespiegelt.
Bestimme den Bildpunkt P'. 5 VP



Bitte wenden!

Aufgabe 3

Gegeben ist die Ebene E_a: $(1+a)x_1 + 2ax_2 - (2-4a)x_3 - 10a = 0,\ a \in \mathbb{R}$.

a) Für welches $a \in \mathbb{R}$ geht E_a durch den Ursprung des Koordinatensystems? 1 VP

b) Die Ebene E_2 und $E_{0.5}$ schneiden sich in einer Schnittgeraden s. Bestimme die Schnittgerade. 5 VP

c) Welche besondere Lage bezüglich des Koordinatensystems hat $E_{0.5}$? 1 VP

Aufgabe 4

Die Punkte O(0|0|0), A(3|0|0) und B(0|3|0) sind die Eckpunkte eines Dreiecks.

a) Die Ebene E: $x_1 - x_2 = 0$ schneidet die Kanten des Dreiecks. Bestimme die Schnittpunkte. 3 VP

b) Zeichne das Dreieck und einen Ausschnitt der Ebene E in ein Koordinatensystem. 3 VP

c) Zeige: Die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$,

liegt in allen Ebenen E_k: $x_1 - x_2 + kx_3 = 3k$ mit $k \in \mathbb{R}$.
Für welche Werte von k schneidet E_k die Kante AB des Dreiecks? 8 VP

Lösung Klausur Nr. 2

Zu Aufgabe 1

Geg.: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

A(7|0|4), B(13|3|-2)

a) Bestimmung von h

A und B liegen auf h. Man verwendet $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ als Stützvektor und $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ als Richtungsvektor.

$$\begin{aligned} \text{h:} \quad \vec{x} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \ s \in \mathbb{R} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 13-7 \\ 3-0 \\ -2-4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bestimmung von E

Es gilt: $\mathrm{g} \in \mathrm{E} \wedge \mathrm{A} \in \mathrm{E}$, ein Spannvektor ist also der Richtungsvektor von g, den wir im Folgenden mit $\vec{v}$ bezeichnen. Der andere Spannvektor ergibt sich aus dem Vektor $\overrightarrow{\mathrm{UA}}$, wobei U der Stützpunkt der Geraden g ist.
Es ist:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{UA}} &= \begin{pmatrix} 7-5 \\ 0+2 \\ 4-4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1. Normalenvektor von E ermitteln

Der Normalenvektor steht senkrecht auf den beiden Spanvektoren. Es gilt also:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{v} &= 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{UA}} &= 0 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich das LGS:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2n_1 & + & n_2 & - & 2n_3 & = & 0 \qquad \text{(i)} \\ n_1 & + & n_2 & & & = & 0 \qquad \text{(ii)} \end{array}$$

Setze $n_2 = r$ mit $r \in \mathbb{R}$.

In (ii):

$$\begin{aligned} n_1 + r &= 0 \\ n_1 &= -r \end{aligned}$$

In (i):

$$\begin{aligned} -2r + r - 2n_3 &= 0 \\ -2n_3 &= r \\ n_3 &= -\frac{1}{2}r \end{aligned}$$

Mit $r = -2$:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alternativ: Bestimme $\vec{n}$ direkt über das Kreuzprodukt[1] von $\vec{v}$ und $\overrightarrow{\mathrm{UA}}$, da so „naturgemäß“ ein zu den Ausgangsvektoren orthogonaler Vektor entsteht.

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \vec{v} \times \overrightarrow{\mathrm{UA}} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[1] Das Kreuzprodukt ist wie folgt definiert: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 2\cdot 2 \\ -2\cdot 2 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot 2 - 1\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gekürzt:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eine Koordinatengleichung der Ebene lautet soweit also:

$$\mathrm{E}_d: \quad 2x_1 - 2x_2 + x_3 = d$$

2. Punktprobe mit A

$$\begin{aligned} 2\cdot 7 - 2\cdot 0 + 4 &= d \\ 14 + 4 &= d \\ \rightarrow \quad d &= 18 \end{aligned}$$

$$\mathrm{E}: \quad 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 18$$

b) Es gilt g ∥ h, da die Richtungsvektoren linear abhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1\cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ferner sind g und h nicht identisch, da sie bei gleichen Richtungsvektoren unterschiedliche Stützvektoren aufweisen, wie man sich leicht mittels Punktprobe überzeugt.
Im Folgenden bezeichnen wir den Stützpunkt von h mit V.

V in g:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t\cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} &\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\ t\cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2t &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \\ 2t &= 2 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1 \quad \lightning \end{aligned}$$

U in h:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} &\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2s &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad s = 0 \\ 2s &= -2 \quad \Leftrightarrow \quad s = -1 \quad \lightning \end{aligned}$$

Also ist g $\parallel$ h und g $\notin$ h. $\square$

Zu Aufgabe 2

Geg.: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

E: $-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2$

a) Aus der Koordinatenform von E lassen sich die Spurpunkte unmittelbar ablesen: S_1(-2|0|0), S_2(0|2/3|0) und S_3(0|0|-1)

Für eine Parameterform von E kann man ansetzen:

$$\begin{aligned} \text{E:} \quad \vec{x} &= \overrightarrow{\mathrm{OS}_1} + s \cdot \overrightarrow{\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2} + r \cdot \overrightarrow{\mathrm{S}_1\mathrm{S}_3}, \quad s, r \in \mathbb{R} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0+2 \\ 2/3-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0+2 \\ 0-0 \\ -1-0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ferner kann aus der Koordinatenform von E der Normalenvektor bestimmt werden.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zusammen mit dem Ortsvektor eines Spurpunkts erhält man die Normalenform der Ebene E:

$$\mathrm{E}: \quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

b) Es muss gelten: g $\stackrel{!}{=}$ E
Dazu müssen die Koordinaten von g in die Koordinatenform von E eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} -(6+t) + 3 \cdot 1 - 2 \cdot (8+3t) &= 2 \\ -6 - t + 3 - 16 - 6t &= 2 \\ -7t &= 21 \\ t &= -3 \end{aligned}$$

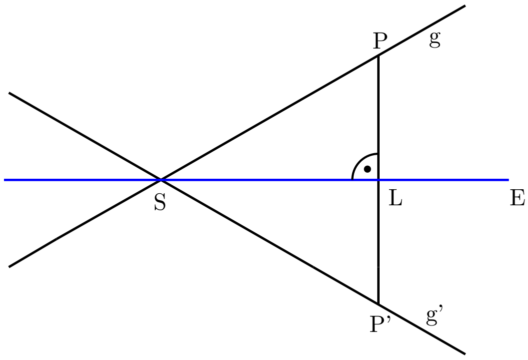
Einsetzen von t in g liefert den Ortsvektor des Schnittpunkts S:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OS}} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6-3 \\ 1-0 \\ 8-9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ S(3|1|-1)

c) Geg.: P(5|1|5) $\in$ g

Skizze:



Die durch die Punkte P und P' verlaufende Gerade ist orthogonal zu E. Ihr Richtungsvektor entspricht also dem Normalenvektor $\vec{n}$ von E. Mit P als Stützpunkt lässt sich diese Hilfsgerade l aufstellen:

$$\begin{aligned} \text{l:} \quad \vec{x} &= \overrightarrow{\text{OP}} + s \cdot \vec{n}, \quad s \in \mathbb{R} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bestimmung des Schnittpunkts L von l mit E: l $\stackrel{!}{=}$ E

$$\begin{aligned} -(5-s) + 3 \cdot (1+3s) - 2 \cdot (5-2s) &= 2 \\ -5 + s + 3 + 9s - 10 + 4s &= 2 \\ 14s &= 14 \\ s &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \overrightarrow{\text{OL}} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ L(4|4|3)

Aufgrund der Symmetrie gilt für den Ortsvektor von P' (siehe Skizze):

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP'}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} + 2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{PL}} \\
&= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4-5 \\ 4-1 \\ 3-5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5-2 \\ 1+6 \\ 5-4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ P'(3|7|1)

Zu Aufgabe 3

Geg.: E_a: $(1+a)x_1 + 2ax_2 - (2-4a)x_3 - 10a = 0, \quad a \in \mathbb{R}$

a) Punktprobe mit dem Ursprung:

$$-10a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_2: \quad & 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 20 \\
\mathrm{E}_{0.5}: \quad & \tfrac{3}{2}x_1 + x_2 &= 5 \\
& 3x_1 + 2x_2 &= 10
\end{aligned}$$

Es soll gelten: $\mathrm{E}_2 \stackrel{!}{=} \mathrm{E}_{0.5}$

$$\begin{array}{ccccccccl}
3x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 20 & & \text{(i)} \\
3x_1 & + & 2x_2 & & & = & 10 & & \text{(ii)}
\end{array}$$

Setze $x_2 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$.

In (ii):

$$\begin{aligned}
3x_1 + 2t &= 10 \\
3x_1 &= 10 - 2t \\
x_1 &= \frac{10}{3} - \frac{2}{3}t
\end{aligned}$$

In (i):

$$\begin{aligned} 10 - 2t + 4t + 6x_3 &= 20 \\ 5 - t + 2t + 3x_3 &= 10 \\ 3x_3 &= 5 - t \\ x_3 &= \frac{5}{3} - \frac{1}{3}t \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Schnittgerade s:

$$\begin{aligned} s: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} 10/3 \\ 0 \\ 5/3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \\ -1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10/3 \\ 0 \\ 5/3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Da $E_{0.5}$ keinen Schnittpunkt mit der x_3-Achse aufweist, liegt die Ebene parallel zu dieser. Zudem schneidet sie die x_1-Achse im Punkt $S_1(10/3|0|0)$ und die x_2-Achse im Punkt $S_2(0|5|0)$.

Zu Aufgabe 4

Geg.: O(0|0|0), A(3|0|0) und B(0|3|0)

a) Die Kanten des Dreiecks OAB liegen auf folgenden Geraden:

$$\begin{aligned} g_1: \quad \vec{x} &= t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \\ g_2: \quad \vec{x} &= t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \\ g_3: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ermittlung der Schnittpunkte der Geraden mit der Ebene E: $x_1 - x_2 = 0$.

1. $g_1 \stackrel{!}{=} E$:

$$t - 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0$$

In g_1:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS_1} &= 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $S_1(0|0|0) = O$

2. $g_2 \overset{!}{=} E$:

$$0 - t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0$$

Der Schnittpunkt ist identisch mit dem zuvor ermittelten, demnach ist $S_2 = O$.

3. $g_3 \overset{!}{=} E$:

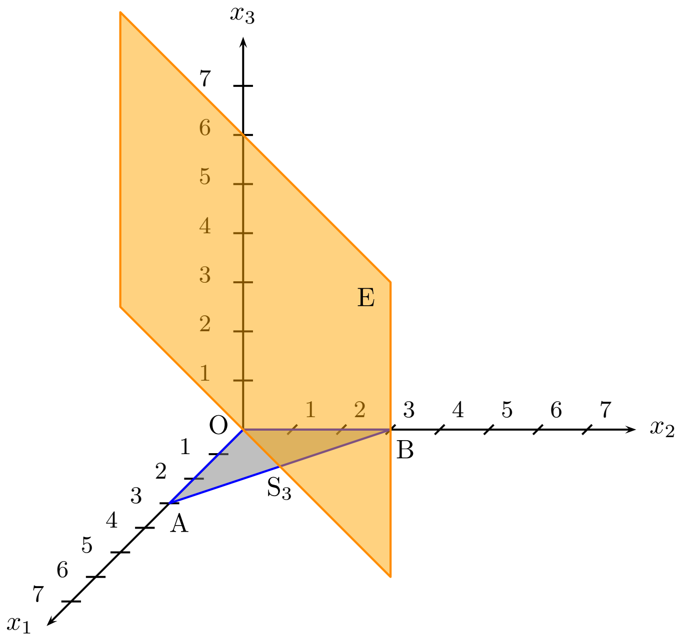
$$\begin{aligned}(3-t) - (0+t) &= 0\\ 3 - t - t &= 0\\ -2t &= -3\\ t &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

In g_3:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS_3} &= \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}3/2\\3/2\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $S_3(3/2|3/2|0)$

b)



c) Geg.: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$

E_k: $x_1 - x_2 + kx_3 = 3k, \; k \in \mathbb{R}$

Zu zeigen: g $\in \mathrm{E}_k$ für alle $k \in \mathbb{R}$.

Dies ergibt sich so: g $\stackrel{!}{=} E$

$$\begin{aligned} t - t + 3k &= 3k \\ 0 &= 0, \quad \text{w.A.} \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist unabhängig von t und k stets erfüllbar, d.h. die Gleichung hat unendlich viele Lösungen. Folglich ist g $\in \mathrm{E}_k$ für alle $k \in \mathbb{R}$. $\square$

Die Kante AB des Dreiecks kann durch die Gerade g_3 (siehe Aufgabenteil a) beschrieben werden, wenn man zusätzlich fordert: $0 \leq t \leq 3$.

Schnittpunkte: $\mathrm{g}_3 \stackrel{!}{=} \mathrm{E}_k$

$$\begin{aligned} (3-t) - t + 0 \cdot k &= 3k \\ 3 - t - t &= 3k \\ 3 - 2t &= 3k \\ \rightarrow \quad k &= 1 - \frac{2}{3}t \end{aligned}$$

Grenzfälle:

$$\begin{aligned} k_0 &= 1-0 \quad \Leftrightarrow \quad k_0 = 1 \\ k_3 &= 1-\frac{2}{3}\cdot 3 \\ &= 1-2 \quad \Leftrightarrow \quad k_3 = -1 \end{aligned}$$

Für $-1 \leq k \leq 1$ schneidet E_k die Kante AB des Dreiecks.